18 Théorème du point fixe de Brouwer

On donne une preuve utilisant du calcul différentiel présent dans [CLF97, Chap. XXXII, Exercice 32-5, p. 179].

18.1 Le développement

***Théorème* (Point fixe de Brouwer)** — *Soit B la boule unité fermé de $\mathbb{R}^n$. Toute fonction $F : B \to B$ continue admet un point fixe.*

Lemme 18.1 — *Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on note D_i le déterminant* $\det(\partial_0 f, \dots, \widehat{\partial_i f}, \dots, \partial_n f)$. *Alors*

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i D_i = 0.$$

DÉMONSTRATION : Décomposons D_i pour faciliter le calcul de $\partial_i D_i$:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Sigma_i} & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & (\partial_j f(x))_{j \neq i} & \longmapsto & \det (\partial_j f(x))_{j \neq i}\,. \end{array}$$

Ainsi $\partial_i D_i(x) = \mathrm{d}_x D_i(e_i)$ où e_i est le i-ème vecteur de la base canonique. Par la formule de la chaîne :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_x D_i(e_i) &= \mathrm{d}_{\Sigma_i \circ f(x)} \delta \circ \mathrm{d}_{f(x)} \Sigma_i \circ \mathrm{d}_x f(e_i) \\ &= \mathrm{d}_{\Sigma_i \circ f(x)} \delta \circ \mathrm{d}_{f(x)} \Sigma_i (\partial_i f(x)) \\ &= \mathrm{d}_{\Sigma_i \circ f(x)} \delta \left(\partial_j \partial_i f(x)\right)_{j \neq i} \quad (\Sigma_i \text{ étant linéaire c'est sa propre différentielle !}) \\ &= \sum_{k \neq i} \det([\partial_k \partial_i f(x)]_k, [(\partial_j f(x))_{j \neq i}]_{\hat{k}}) \quad (\text{par le Lemme 18.2}) \\ &= \sum_{j \neq i} \underbrace{\det \left(\partial_i \partial_j f(x), \partial_0 f(x), \dots, \widehat{\partial_i f(x)}, \widehat{\partial_j f(x)}, \dots, \partial_n f(x) \right)}_{X_{ij}} \cdot \varepsilon_{ij}, \end{aligned}$$

avec

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} (-1)^j & \text{si } j < i \\ (-1)^{j-1} & \text{si } j > i. \end{cases}$$

La dernière égalité étant obtenu en faisant passer la k-ième colonne $\partial_i \partial_j f(x)$ en première position. Par conséquent, en remarquant que $X_{ij} = X_{ji}$ (par le théorème de Schwarz), on trouve bien que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i D_i &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{j \neq i} X_{ij} \begin{cases} (-1)^j & \text{si } j < i \\ (-1)^{j-1} & \text{si } j > i. \end{cases} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j X_{ij} + \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^{j-1} X_{ij} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j X_{ij} - \sum_{j<i} (-1)^i (-1)^j X_{ij} \right) = 0 \end{aligned}$$

□

Démonstration du théorème de point fixe de Brouwer : Soit $F : B \to B$ de classe C^∞. Supposons par l'absurde que $F(x) \neq x$ pour tout $x \in B$.

`1) Montrons que` $a : B \to \mathbb{R}$ `est` C^∞ où a est la fonction qui à x associe la plus grande valeur α solution de $\|x + \alpha(x - F(x))\|^2 = 1$. En développant l'expression on obtient un polynôme du second degré en $a(x)$:

$$\|x\|^2 - 1 + 2a(x)\langle x, x - F(x)\rangle + a(x)^2\|x - F(x)\|^2 = 0.$$

Géométriquement, le discriminant est positif, de fait,

$$\Delta(x) = \langle x, x - F(x)\rangle^2 + (1 - \|x\|^2)\|x - F(x)\|^2 \geq 0,$$

et

$$a(x) = \frac{-\langle x, x - F(x)\rangle + \sqrt{\Delta(x)}}{\|x - F(x)\|^2}$$

définit une fonction C^∞ de B dans $\mathbb{R}$. Remarquons que si $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, alors $a(x) = 0$.

`2) Recherche d'une contradiction` : Posons $f(t, x) = x + ta(x)(x - F(x))$ et

$$I(t) = \int_B D_0(t, x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Si $t = 0$, on a $f(t, x) = x$ si bien que $D_0(0, x_1, \ldots, x_n) = \det I_n = 1$ et ainsi $I(0) = \mathrm{vol}\, B$. Quand $t = 1$, $f(t, x) = x + a(x)(x - F(x)) \in \mathbb{S}^{n-1}$. Ainsi $f(1, \cdot) : B \to \mathbb{S}^{n-1}$ n'est nulle part un difféomorphisme local, si bien que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in B$, $D_0(x_1, \ldots, x_n) = 0$ et $I(1) = 0$. D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, I est C^1 et par le Lemme 18.1,

$$\begin{aligned} I'(t) = \int_B \partial_0 D_0 \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n &= \int_B \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\partial_i D_i\right)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int \cdots \int \left(\int_{-x_i}^{x_i} \partial_i D_i \mathrm{d}x_i\right)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1} \cdots \mathrm{d}x_n. \end{aligned}$$

Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$, on constate que $\partial_0 f = a(x)(x - F(x)) = 0$ (car $a(x) = 0$), si bien que $D_i = 0$ sur $\mathbb{S}^{n-1}$. Finalement $I' = 0$ et I est constante. Contradiction et F n'existe pas.

`3) Raisonnement par densité` : Si F est maintenant continue, on construit une suite d'application $F_n : B \to B$ de classe C^∞ qui converge uniformément vers f quand $n \to \infty$. Chacune d'entre elles à un point fixe $x_n \in B$. Comme B est compact, (x_n) possède une valeur d'adhérence disons $x \in B$ et après extraction d'une sous-suite, on a $F(x) = \lim F_{n_k}(x_{n_k}) = \lim x_{n_k} = x$ ce qui prouve que F à un point fixe. $\square$

18.2 Compléments

Remarque — Le théorème est faux sur la boule ouverte, on trouve le contre-exemple suivant en dimension 1. La fonction $f :]-1, 1[\to]-1, 1[$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$ est continue, envoie bien la boule unité sur elle-même, mais ne possède pas de point fixe..

Lemme 18.2 — *Soit $E_1, \dots, E_n, F$ des espaces vectoriels normés et soit $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application n-linéaire continue. L'application φ est différentiable en tout point et*

$$\mathrm{d}_{\underline{x}}\varphi(\underline{h}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} \varphi([h_i]_i, [\underline{x}]_{\hat{i}})$$

pour tous $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n), \underline{h} = (h_1, \dots, h_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$.

Le résultat se généralise à un ensemble compact convexe :

Corollaire 18.3 — *Soit C un compact convexe de $\mathbb{R}^n$. Toute fonction $f : C \to C$ continue possède un point fixe.*

C'est une conséquence immédiate du théorème de point fixe de Brouwer et de la proposition suivante :

Proposition 18.4 — *Tout compact convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\overline{B_k(0,r)}$ pour un $k \leq n$ et un $r > 0$.*

Démonstration : Soit C un compact convexe de $\mathbb{R}^n$. On se place dans $F = \mathrm{Vect}(C)$ muni de sa topologie canonique. Dans F, l'intérieur de C est non vide. Par translation, on peut donc supposer que C contient la boule $B(0,r)$ pour un $r > 0$. Notons $S = \partial B(0,r)$. Pour tout $u \in S$, l'intersection $C \cap \mathbb{R}_+ u$ est un convexe compact de $\mathbb{R}_+ u$ contenant 0, i.e. un ensemble de la forme $[0, g(u)]$. De plus $g(u) \in \partial C$ (donc $\|g(u)\| \geq r$) tandis que tout autre point du segment est intérieur à C (car il est intérieur à $\mathrm{Conv}\{B(0,r), g(u)\}$). Puis l'application $g : S \to \partial C$ est un homéomorphisme. En effet, d'après ce qui précède, c'est la bijection réciproque de l'application $v \mapsto \frac{rv}{\|v\|}$, continue sur le compact ∂C. Pour conclure, on étend g en une bijection $G : B(0,r) \to C$ en posant $G(tu) = tg(u)$ pour tout $u \in S$ et tout $t \in [0,1]$. Cette application est continue en tout vecteur non nul. Comme g est bornée (car C est compact), G est aussi continue en 0. C'est donc bien, comme g, un homéomorphisme entre deux compacts. □

Voyons un contre-exemple en dimension infini : on se place sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ muni de sa norme usuelle et on considère l'application

$$T : \left\{ \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{Z}) & \to & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (1 - \|x\|)e^0 + \sigma(x), \end{array} \right.$$

où e^0 est la suite ne contenant que des 0 sauf en 0-ième position où elle vaut 1 et σ est le l'opérateur de shift à droite ($\sigma(x_n) = x_{n+1}$). On vérifie qu'elle est bien défini, continu par continuité de la norme et du shift (qui est une isométrie). De plus

$$\forall x \in \overline{B(0,1)}, \quad \|T(x)\| \leq |1 - \|x\|| + \|x\| = 1.$$

Pourtant nous allons voir que T n'admet pas de point fixe, en effet :

$$\forall x \in \overline{B(0,1)}, \quad T(x) = x \iff \left\{ \begin{array}{ll} x_0 = 1 - \|x\| + x_{-1} & \\ x_n = x_{n-1} & \text{pour } n \neq 0. \end{array} \right.$$

Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_n = 0 & \text{si } n \geq 0 \\ x_n = x_{-1} & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Puisque $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $x_0 = x_{-1} = 0$, donc $x = 0$, mais c'est impossible car $x_0 = 1 - \|x\| + x_{-1}$.

Sous des hypothèses supplémentaires, on a une généralisation du théorème de Brouwer qui est énoncé ci-dessous.

***Théorème* (Point fixe de Schauder)** — *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, C un convexe fermé non vide de E et $T : C \to C$ continue. Si $T(C)$ est relativement compact (i.e. $\overline{T(C)}$ est compact), alors T admet un point fixe.*

Références

[CLF97] A. Chambert-Loir and S. Fermigier. *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 3.* Masson, 1997.